Il Calcolo

- Il calcolo delle aree
- L’integrale definito
- Il teorema fondamentale del calcolo integrale
- L’integrale indefinito
- Il calcolo dei volumi di solidi di rotazione
- Gli integrali generalizzati

A cura dell’ISTITUTO G. BRUNO di Budrio

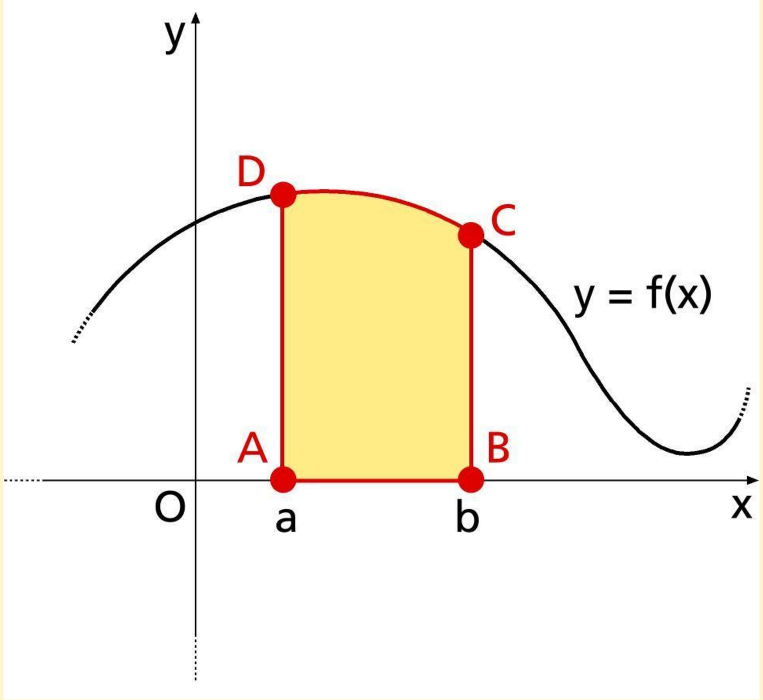
L'integrale definito di una funzione

- Il trapezoide
- I plurirettangoli
- L'integrale definito di una funzione $f(x) \geq 0$
- L'integrale definito
- Il teorema fondamentale del calcolo integrale
- Il calcolo delle aree

A cura dell'ISTITUTO G. BRUNO di Budrio

Il trapezoide

Data una funzione $f(x)$ continua e positiva (o nulla) nell'intervallo $[a; b]$, si chiama **trapezoide** la figura piana delimitata dall'asse x, dalle rette $x = a$, $x = b$ e dal grafico della funzione f nell'intervallo.

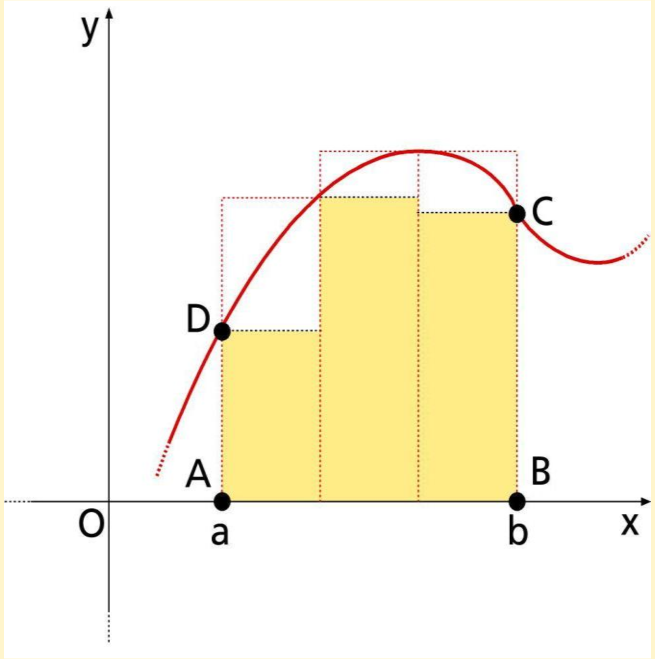


Indichiamo con S l'area del trapezoide.

I plurirettangoli

Dividiamo l'intervallo [a; b] in n parti uguali (per es. n = 3) $a=x_0<x_{i-1}<x_i<x_n=b$

Per ogni intervallo $I_i=[x_{i-1};x_i]$, con $i=1,..,n$ consideriamo il minimo m_i e il massimo M_i della funzione su I_i e costruiamo il rettangolo corrispondente.



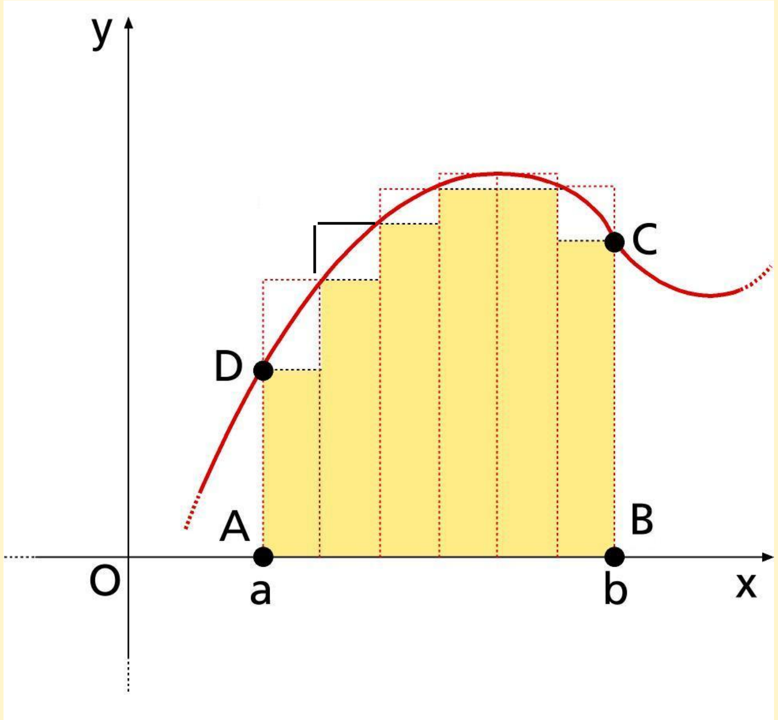
Si ottengono due plurirettangoli di aree

s_n e S_n con: $s_n \leq S \leq S_n$

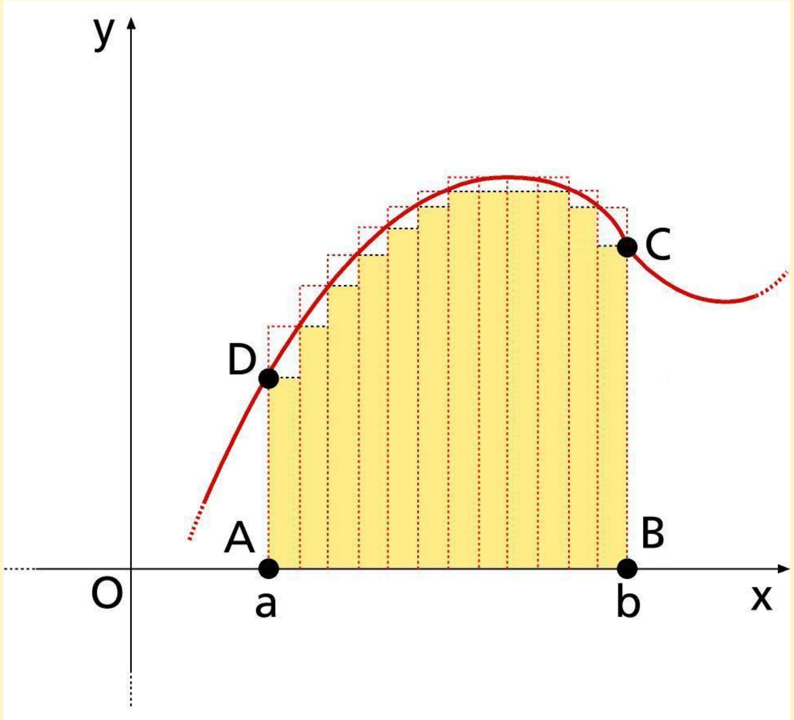
Le superfici s_n e S_n costituiscono una **approssimazione per difetto** e **per eccesso** dell'area S del trapezoide.

Se aumentiamo il numero di suddivisioni *n*, le aree s_n e S_n approssimano sempre meglio l'area *S* del trapezoide.

Plurirettangolo con *n* = 6



Plurirettangolo con *n* = 12



L'integrale definito $f(x) \geq 0$

Data una funzione $f(x)$ continua e positiva

(o nulla) nell'intervallo $[a; b]$, s_n è una successione

monotona crescente e superiormente limitata in

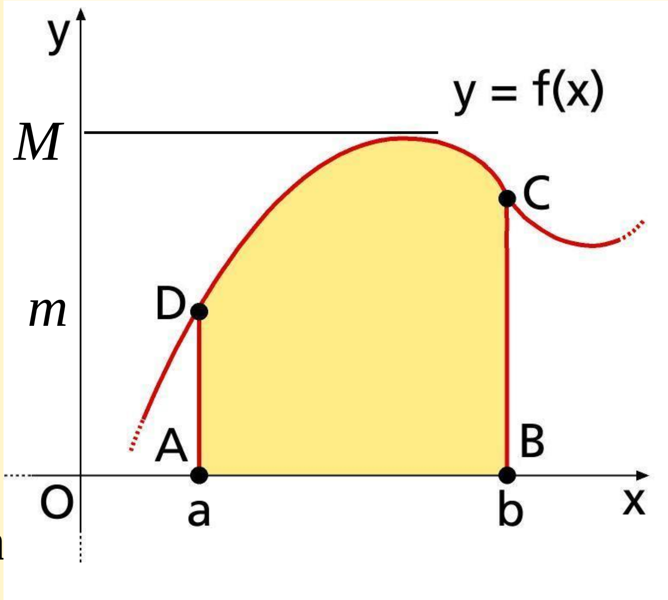
quanto $s_n \leq M(b-a)$, mentre S_n è una successione

monotona decrescente limitata inferiormente in

quanto $S_n \geq m(b-a)$. Le successioni pertanto

ammettono. Si dimostra che tale limite è il medesim

rappresenta l'area del trapezoide.



$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

L'integrale definito: definizione

Tale limite si chiama **integrale definito** di *f(x)* nell'intervallo [a;b] e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

Si dice che **f(x) è integrabile (secondo Riemann)**

L'integrale definito: proprietà 1

- Se f è integrabile su $[a; b]$ allora si ha

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

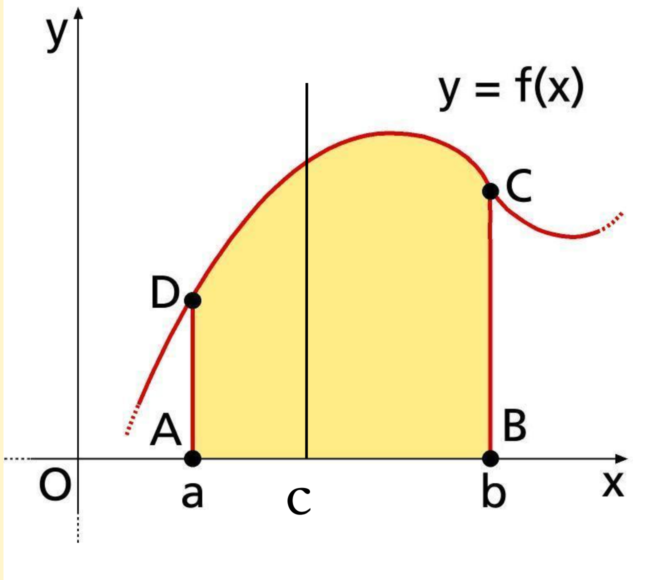
- Per convenzione si pone

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- Se f è integrabile su $[a; b]$ e $c \in [a;b]$

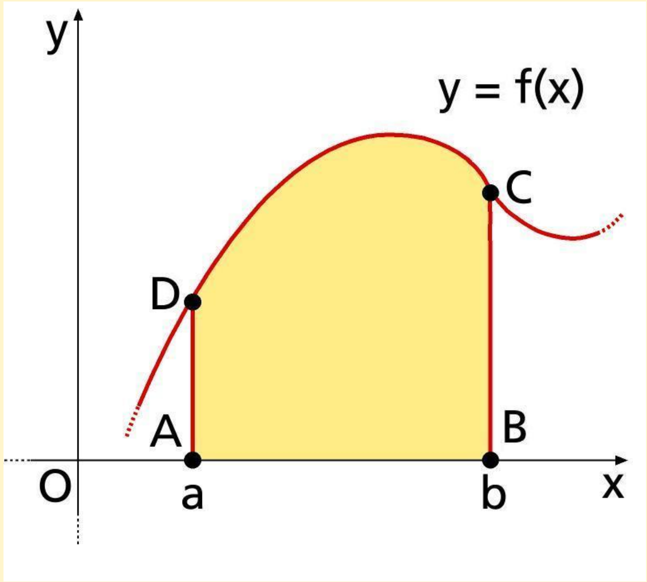
allora si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



L'integrale definito: proprietà 2

- Ogni funzione continua su un intervallo [a; b] chiuso e limitato è integrabile su tale intervallo.
- **LINEARITÀ**: Se f e g sono funzioni integrabili su [a; b] anche la funzione $\alpha f+\beta g$, dove α, β sono costanti, è integrabile su [a; b] e si ha:



$$\int_a^b \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

A cura dell'ISTITUTO G. BRUNO di Budrio

L'integrale definito: proprietà 3

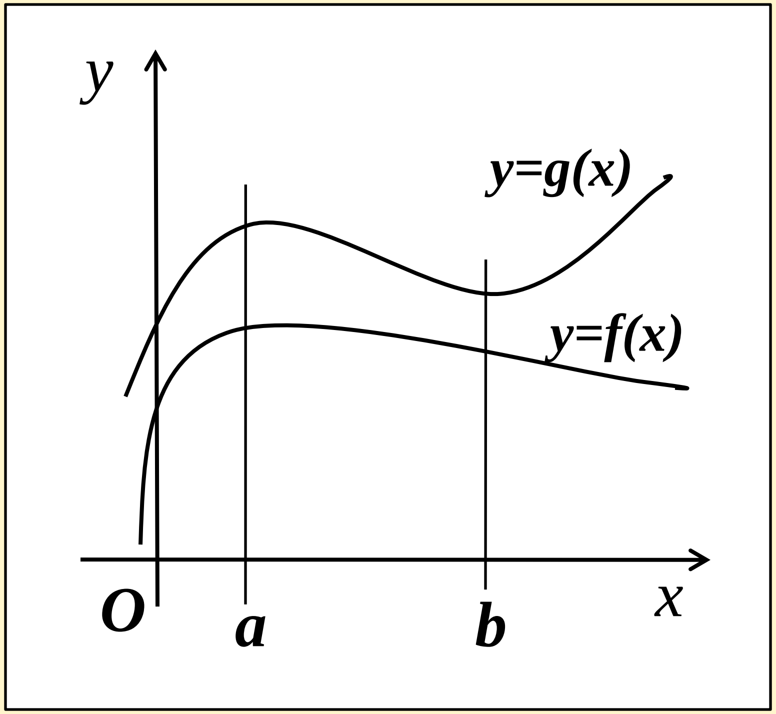
- Se f e g sono funzioni integrabili su

$[a; b]$ con

$$f(x) \leq g(x)$$

allora si ha

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$



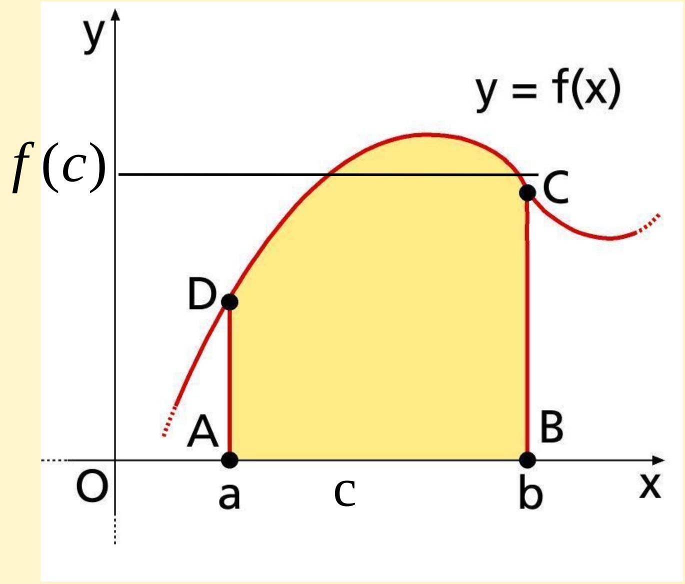
Il teorema della media

Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora esiste un punto

$$c \in [a;b]$$

tale che :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



Il teorema della media - dimostrazione

Se una funzione $f(x)$ è continua in [a; b] allora esistono m e M rispettivamente minimo e massimo assoluti di f su [$a;b$] e si ha:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

da cui si ottiene

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

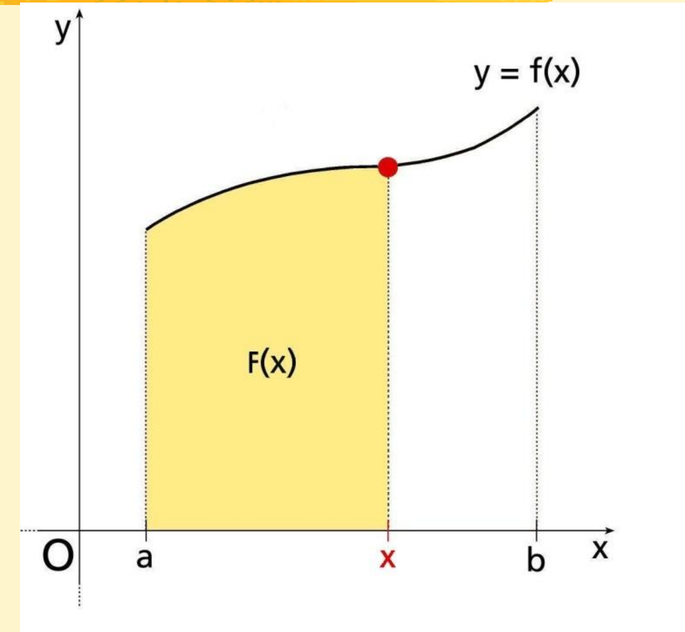
Allora, per il teorema del valore intermedio esiste $c \in [a;b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale
Teorema di Torricelli-Barrow

Se una funzione $f(x)$ è continua in [a; b], allora si chiama **funzione integrale** di f relativa al punto a

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$



Si ha che:

1. $F(a)=0$
2. $F(x)$ è derivabile su $[a;b]$
3. $F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in [a;b]$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale dimostrazione

Consideriamo due punti *x* e *x*+*h* in[*a*; *b*] e scriviamo il rapporto incrementale di *F*:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt}{h}$$

Per le proprietà dell'integrale definito

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Per il teorema della media esiste un punto $c\in[x;x+h]$ tale che

$$f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

quando h tende a zero si ha $h\to 0\Rightarrow x+h\to x\Rightarrow c\to x$ quindi segue che

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0} f(c)=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

Quindi F sono dimostrati i punti 2 e 3. La 1 è evidente. C.v.d.

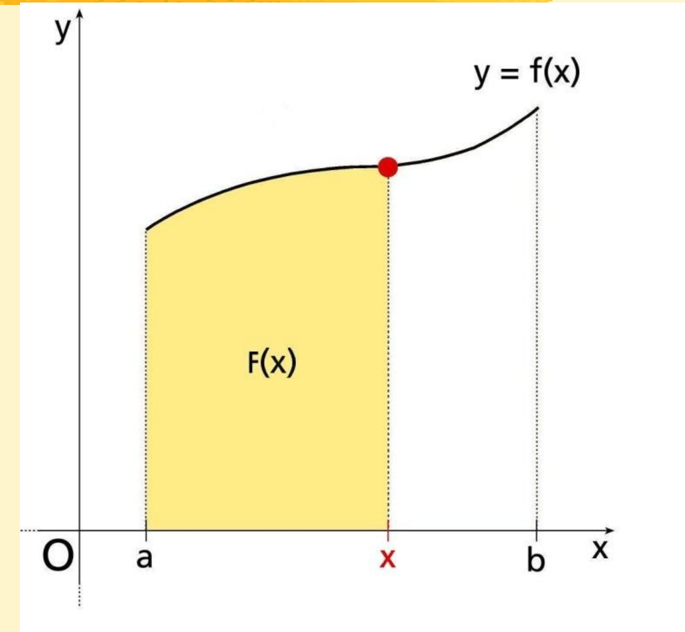
A cura dell'ISTITUTO G. BRUNO di Budrio

Il teorema fondamentale del calcolo integrale 2

Una funzione *V(x)* che soddisfa la condizione

$$V'(x) = f(x)$$

si chiama **primitiva di f** e differisce da *F(x)* per una costante.



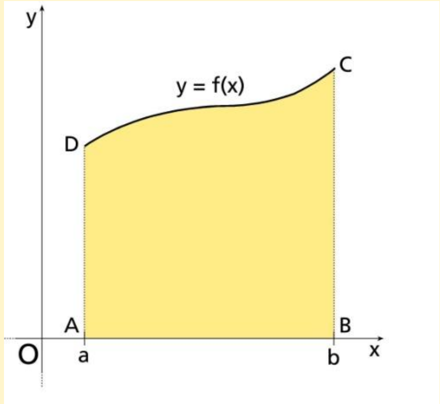
Se *V* è una qualsiasi primitiva di *f* si ha allora che

$$\int_a^b f(x)dx = V(b) - V(a)$$

Il calcolo delle aree 1

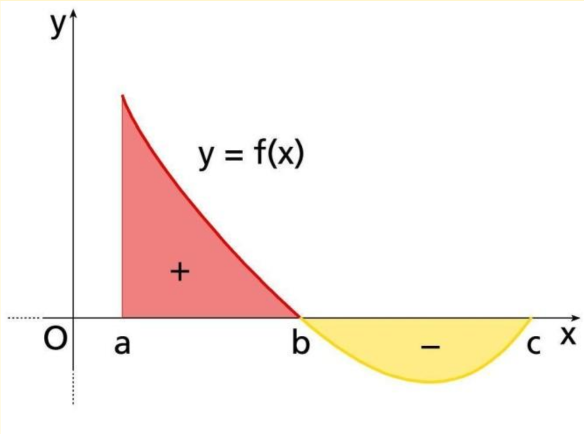
La funzione è positiva o al più nulla

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



Se la funzione è almeno in parte negativa l'integrale della funzione tra *b* e *c* sarà negativa, quindi l'area sottesa tra *b* e *c* avrà segno opposto all'integrale tra *b* e *c*:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$



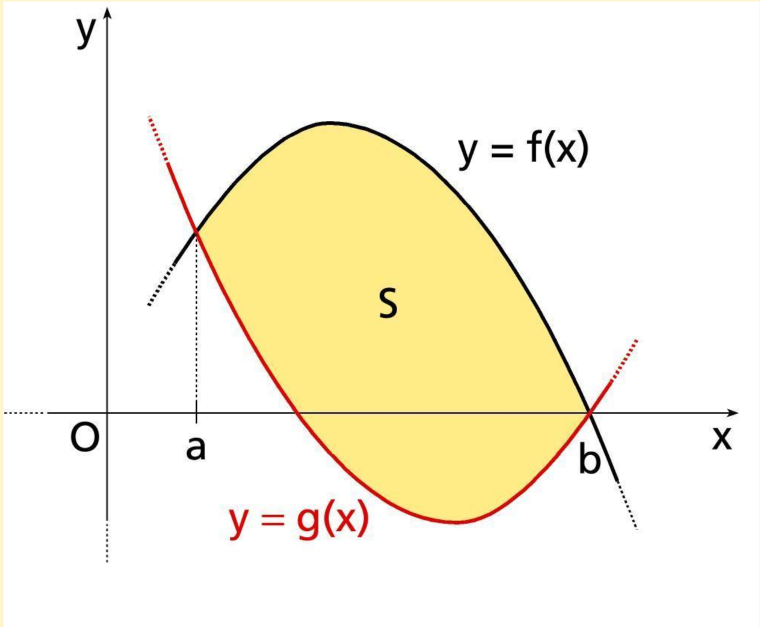
Il calcolo delle aree 2

Se due funzioni delimitano una superficie chiusa, supponiamo che sia

$$f(x) \geq g(x)$$

allora si ha:

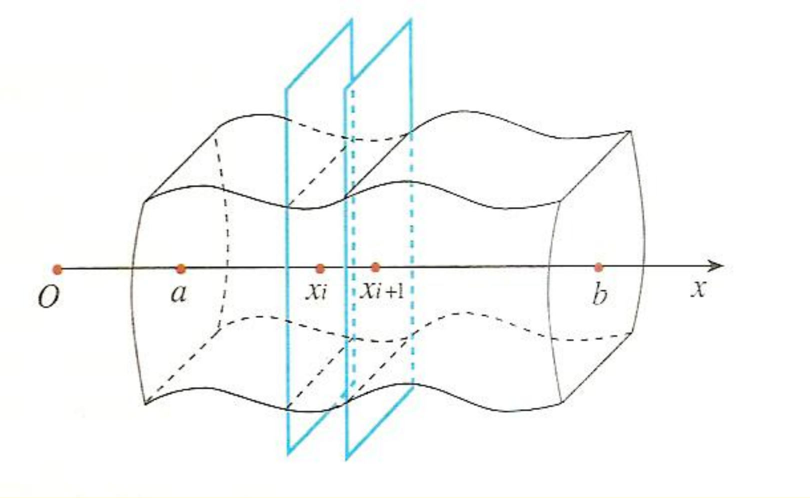
$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$



Volumi dei solidi

Si sa che il volume di un prisma o di un cilindro si ottiene moltiplicando l'area di base per l'altezza.

Un'approssimazione del volume della fetta è $S_n \dfrac{b-a}{n}$ dove S_n è l'area di una sezione della fetta.



Il volume del solido è dato dalla somma di tutti quei volumi, quindi è la somma integrale di *S(x)* tra *a* e *b*, da cui

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Volumi di coni e piramidi

Data una piramide retta di altezza h e area di base S_b, si sa che l'area di una sezione è proporzionale al quadrato della distanza dal vertice, perciò $S(x) = kx^2$, dove x è la distanza dal vertice. Poiché $S_b = kh^2$ si ha

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h kx^2 dx = k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{kh^3}{3} = \frac{1}{3}S_b h$$

Per il cono di altezza h e raggio di base r sarà:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

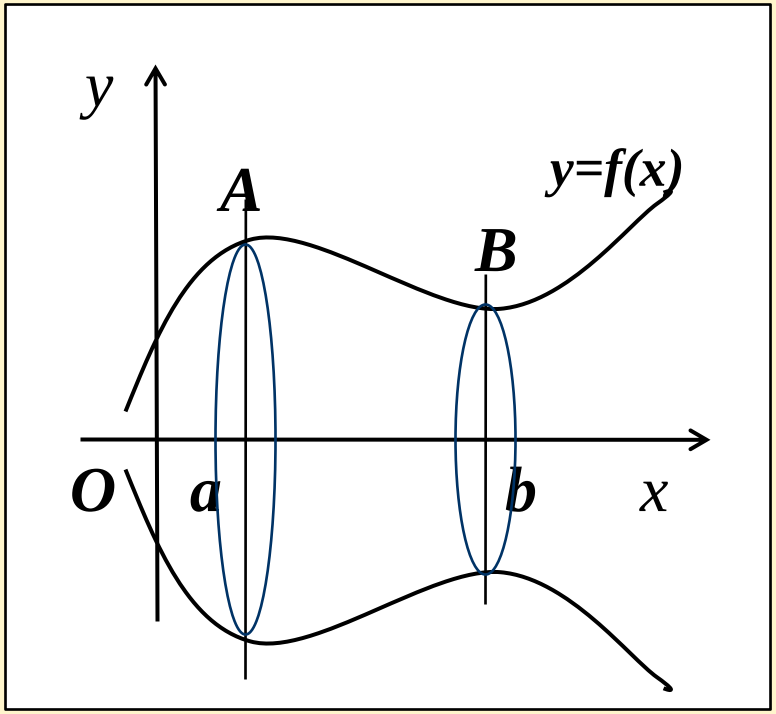
Volumi dei solidi di rotazione (asse x)

Si tratta di determinare il volume del solido generato dalla rotazione completa del trapezoide individuato da $y=f(x)$ attorno all'asse x.

Se $y=f(x)$ fosse costante, questa rotazione genera un cilindro di raggio di base $k=f(x)$ e altezza $b-a$ che ha volume $V=\pi k^2.(b-a)$.

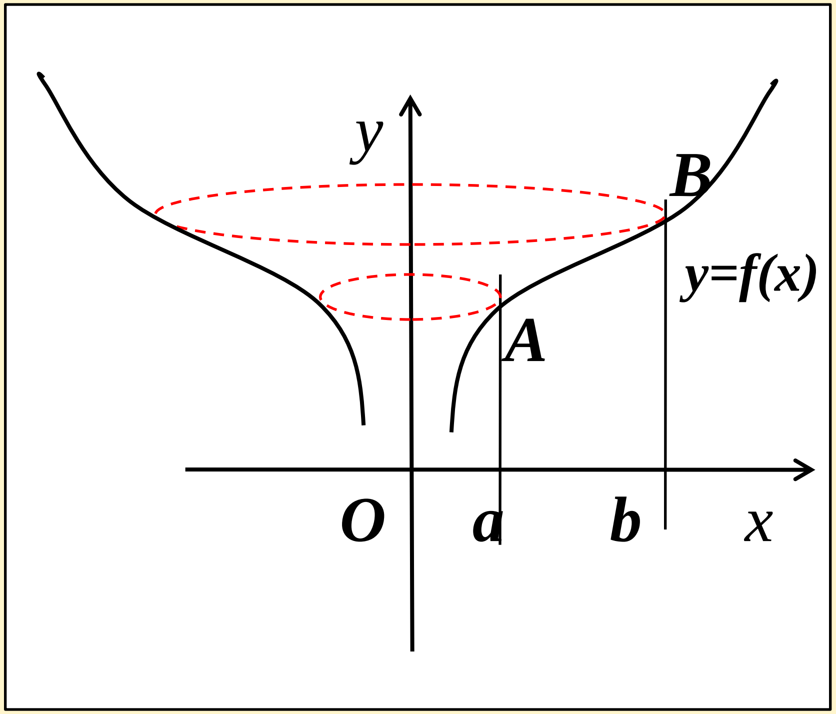
La variabilità di f impone il passaggio al calcolo integrale e si ha:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$



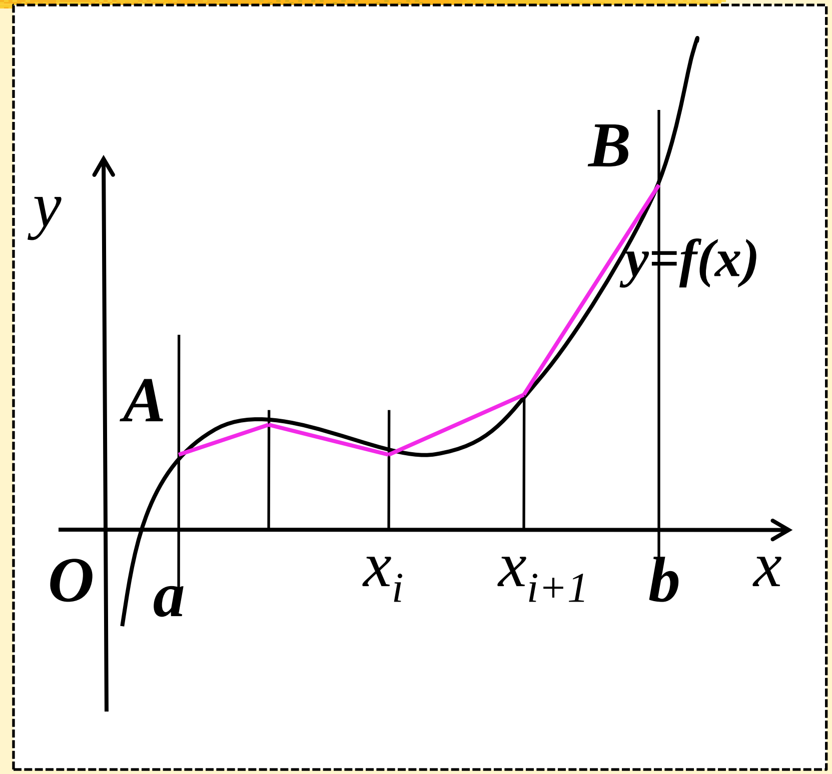
Volumi dei solidi di rotazione (asse y)

Si tratta di determinare il volume del solido generato dalla rotazione completa del trapezoide individuato da *y=f(x)* attorno all'asse *y*.
A differenza del caso precedente dobbiamo integrare la funzione rispetto all'asse *y*, quindi *f* deve necessariamente essere invertibile su [*a;b*]; il raggio sarà $x=f^{-1}(y)$ e si ha:



$$V=\pi\int_{f(a)}^{f(b)}\left(f^{-1}(y)\right)^2 dy$$

Lunghezza di un arco di curva



Si tratta di determinare la lunghezza dell'arco AB.

Come sempre se il grafico di *f* fosse rettilineo non ci sono problemi, ma nel caso più generale si passerà ad approssimare la curva con una spezzata (in rosa nel disegno).

Il segmento di estremi $\left(x_i; f(x_i)\right)$ e $\left(x_{i+1}; f(x_{i+1})\right)$ ha lunghezza $L_i = \sqrt{\left(x_{i+1} - x_i\right)^2 + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2}$

Per il teorema di Lagrange si può scrivere:

$$L_i = \left(x_{i+1} - x_i\right)\sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}, c_i \in \left[x_i; x_{i+1}\right]$$

La somma di tutte le L_i approssima l'arco AB e rappresenta la somma integrale della funzione $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$ quindi

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Integrali generalizzati o impropri

Si tratta di estendere il calcolo di un integrale definito ad uno dei seguenti casi:

→In almeno uno dei due estremi di integrazione o in un punto interno all'intervallo di integrazione la funzione ha un asintoto verticale;

→L'intervallo di integrazione non è limitato.

Integrali generalizzati o impropri
definizione

Indichiamo d'ora in avanti con $(a;b)$ un qualsiasi intervallo limitato o illimitato, eventualmente aperto, in $\Re$.

Se $f:(a;b)\rightarrow\Re$ è integrabile secondo Riemann su ogni intervallo limitato e chiuso $[\alpha;\beta]\subset(a;b)$ chiamata

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx; \qquad x_0, x\in[\alpha;\beta]$$

Diciamo che ***f* è integrabile su** $(a;b)$ **in senso generalizzato** se esistono finiti $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$

E chiamiamo integrale generalizzato di *f* esteso all'intervallo $(a;b)$ la differenza di tali limiti:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{x\to b^-} F(x)-\lim_{x\to a^+} F(x)$$

Se almeno uno di tali limiti non esiste o è infinito diciamo che *f* non è integrabile in senso generalizzato su $(a;b)$.

Si dice anche che l'integrale di *f* su $(a;b)$ è **convergente** (se *f* è integrabile) o è **divergente** (se *f* non è integrabile).

N.B. Se *f* è continua su *(a;b) F* è una primitiva di *f.*

Regole di integrazione 1

Integrali immediati:

$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \log\lvert x \rvert + c$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$	$\int a^x dx = a^x \log_a e + c$
$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$

Regole di integrazione 2

Integrali *(quasi)* **immediati** per l'applicazione delle regole di derivazione:

1. $\int [f(x)]^\alpha f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$
2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$
3. $\int f'(x)\,\mathrm{sen}\, f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$
4. $\int f'(x) \cos f(x)\,dx = \mathrm{sen}\, f(x) + c$
5. $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \mathrm{tg}\, f(x) + c$
6. $\int \frac{f'(x)}{\mathrm{sen}^2 f(x)}\,dx = -\mathrm{ctg}\, f(x) + c$
7. $\int f'(x) e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$
8. $\int f'(x) a^{f(x)}\,dx = a^{f(x)} \log_a e + c$
9. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \mathrm{arcsen} f(x) + c$
10. $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \mathrm{arctg}\, f(x) + c$