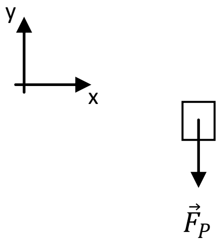
Conservazione dell'energia meccanica

Alcuni casi notevoli che includono forze peso, elastiche, vincolari, elettriche

<u>Nota</u>: in ognuno dei casi seguenti si trascurano le forze d'attrito, che sono non conservative.

1) Caduta libera



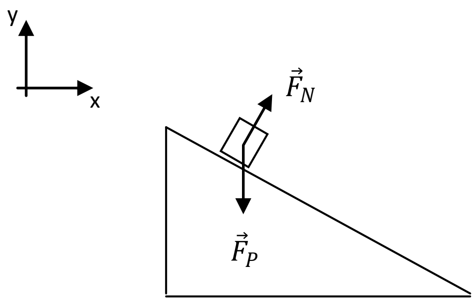
$$\vec{F}_P = m\vec{a}$$

$\vec{F}_P$ conservativa

⇩

$$E_M = K + U_P = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{cost.}$$

2) Caduta lungo un piano inclinato liscio



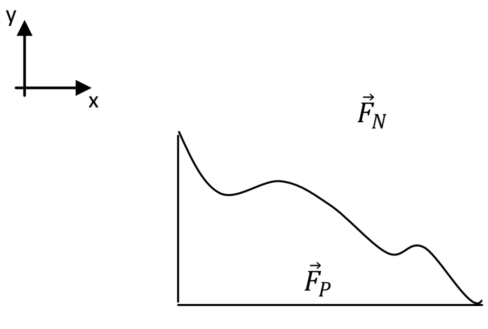
$$\vec{F}_P + \vec{F}_N = m\vec{a}$$

$\vec{F}_P$ conservativa, $\vec{F}_N$ compie lavoro nullo

⇩

$$E_M = K + U_P = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{cost.}$$

3) Caduta lungo una guida liscia di profilo vario (ma "regolare")



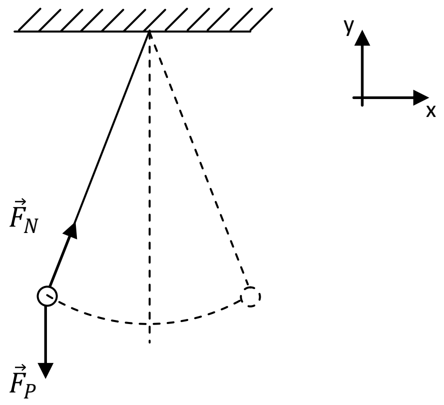
$$\vec{F}_P + \vec{F}_N = m\vec{a}$$

$\vec{F}_P$ conservativa; $\vec{F}_N$, che qui varia in direzione e intensità, compie sempre lavoro nullo

⇩

$$E_M = K + U_P = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{cost.}$$

4) Pendolo



$\vec{F}_P + \vec{F}_N = m\vec{a}$

$\vec{F}_P$ conservativa; $\vec{F}_N$, che qui varia in direzione e intensità, compie sempre lavoro nullo

⇩

$E_M = K + U_P = \frac{1}{2}mv^2 + mgy =$ cost.

Nota: in ognuno di questi primi quattro casi l'espressione dell'energia meccanica del sistema è la stessa e solo la forza peso (costante, diretta verticalmente verso il basso) compie lavoro (e dunque l'energia potenziale è quella corrispondente a questa forza) . Possiamo dedurne la seguente conseguenza: a parità di velocità iniziale, dopo un uguale dislivello (*verticale*, Δy) il corpo avrà velocità *di ugual modulo* (e direzione in generale diversa) in ognuno di questi casi. Dall'espressione di E si ricava che tale modulo della velocità è *indipendente dalla massa del corpo*: la quantità E_M/m , infatti risulta essere una quantità costante, indipendente da m.

Esempio: consideriamo un corpo che, rispetto al sistema di riferimento prescelto, abbia ad un determinato istante (stato iniziale) velocità $|\vec{v}_i| = 0{,}3\ \mathrm{m/s}$ e quota $y_i = 0$. All'istante in cui il corpo arriva a quota $y_f = -20\ \mathrm{cm}$ (supponiamo che fisicamente ciò sia possibile in ognuno dei quattro casi), esso avrà una velocità

$$E_i = \frac{1}{2}m{v_i}^2 + mgy_i = \frac{1}{2}m{v_i}^2 + 0 = \frac{1}{2}m{v_i}^2$$
$$E_f = \frac{1}{2}m{v_f}^2 + mgy_f$$

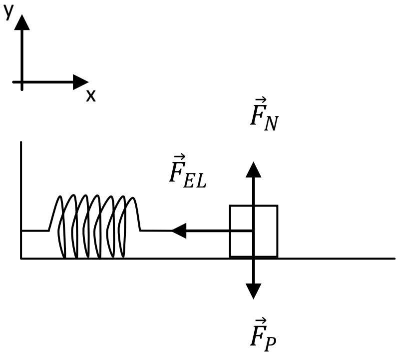
$$E_i = E_f \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}m{v_i}^2 = \frac{1}{2}m{v_f}^2 + mgy_f$$

Dividendo ambo i membri per m, la massa sparisce. Ricavando l'unica incognita v_f, si ottiene:

$$|v_f| = \sqrt{{v_i}^2 - gy_f} = \sqrt{(0{,}3\ \mathrm{m/s})^2 - (9{,}81\ m/s^2)(-0{,}2\ m)} \cong 1{,}43\ \mathrm{m/s}$$

Questa risoluzione è la medesima nei quattro casi considerati. In essi troveremo eventualmente una *direzione* diversa della velocità all'istante considerato.

5) Molla orizzontale



$$\vec{F}_P + \vec{F}_N + \vec{F}_{EL} = m\vec{a}$$

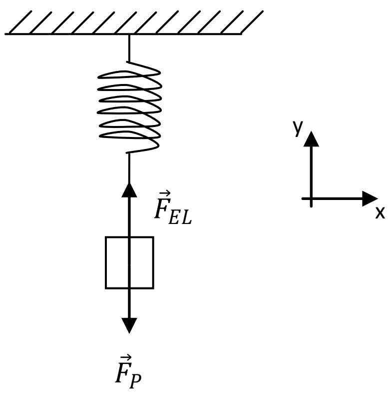
$\vec{F}_P$ e $\vec{F}_{EL}$ conservative, $\vec{F}_N$ compie lavoro nullo

⇩

$$E_M = K + U_P + U_{EL} =$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 = cost.$$

Nota: siccome y non varia, il termine di energia potenziale gravitazionale è ininfluente, tant'è che può essere scelto nullo con un'opportuna scelta del sistema di riferimento (in cui l'asse x è la retta del piano lungo cui avviene il moto).
x_0 è l'ascissa del corpo (punto materiale) quando la molla è a riposo.

6) Molla verticale



$$\vec{F}_P + \vec{F}_{EL} = m\vec{a}$$

$\vec{F}_P$ e $\vec{F}_{EL}$ conservative

⇩

$$E_M = K + U_P + U_{EL}$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k(y - y_0)^2 = \text{cost.}$$

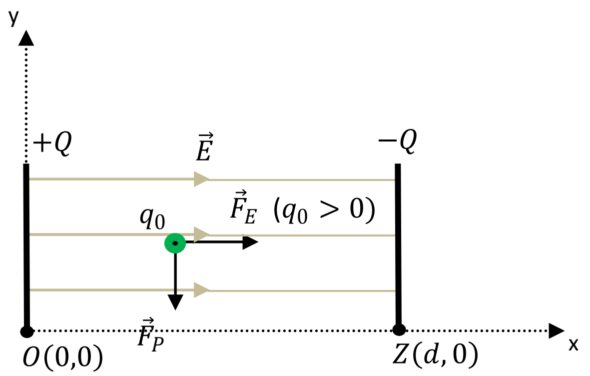
Nota: y_0 è l'ordinata del corpo (punto materiale) quando la molla è a riposo.

Nota: si dimostra che in ambo i casi il moto è simmetrico intorno alla posizione di equilibrio del corpo, diversa nei due casi. Le coordinate non banali sono, rispettivamente:

1° caso: $\Sigma F_x = 0 \implies F_{ELx} = 0 \implies -k(x - x_0) = 0 \implies x = x_0$

2° caso: $\Sigma F_y = 0 \implies F_{Py} + F_{ELy} = 0 \implies -mg - k(y - y_0) = 0 \implies y = y_0 - \frac{mg}{k}$

7) Campo elettrico costante orizzontale



$\vec{F}_P + \vec{F}_E = m\vec{a}$

$\vec{F}_P$ e $\vec{F}_E$ conservative (costanti)

$$\Downarrow$$

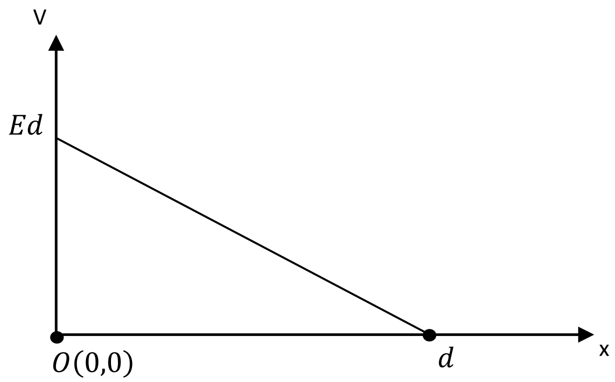
$E_M = K + U_P + U_E =$

$= \frac{1}{2}mv^2 + mg(y - y_0) - q_0E(x - x_0) = \text{cost.}$

<u>Nota</u>: entrambe le forze in gioco sono costanti; il segno + nell'energia potenziale della forza peso e il segno - nell'energia potenziale elettrica dipendono dal fatto che $\vec{g}$, diretta lungo y, ha verso opposto a tale asse, mentre $\vec{E}$ ha lo stesso verso dell'asse x lungo cui è diretto (la deduzione di questa corrispondenza richiede il calcolo di un lavoro).
A differenza dei casi precedenti le espressioni qui usate per l'energia potenziale richiedono di fissare a 0 l'energia potenziale in un punto di coordinate (x_0, y_0), scelto arbitrariamente. Prima questa scelta era implicita; ora la esplicitiamo.
Nulla vieta di fissare $x_0 = y_0 = 0$. Un'altra scelta comune è quella di fissare l'origine del SR nel punto più basso dell'armatura positiva del condensatore e di scegliere lo 0 dell'energia potenziale nel punto $Z(d, 0)$, dove d è la distanza tra le armature; ponendo dunque $x_0 = d$, $y_0 = 0$ si ha:

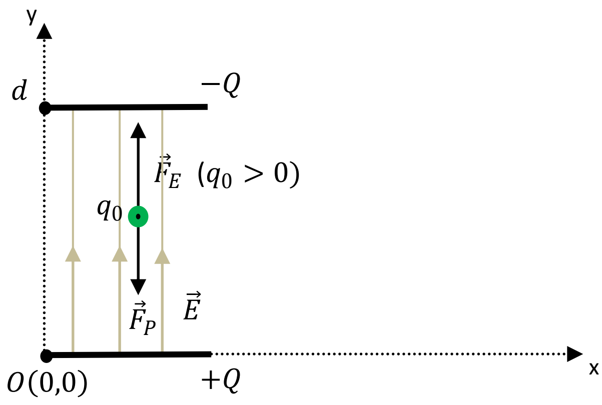
$$\mathrm{E_M} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy - q_0E(x - d) = \text{cost.}$$

Si osservi immediatamente che ogni punto dell'armatura negativa ha $U_E = -q_0E(d - d) = 0$ e ogni punto dell'armatura positiva ha $U_E = -q_0E(0 - d) = q_0Ed$; su ciascuna armatura il valore di V risulta essere costante: le due armature sono superfici equipotenziali, come deve essere per un conduttore. L'energia potenziale totale è invece diversa in ciascun loro punto, dato che y cambia.
Tra le armature il potenziale elettrico decresce linearmente con x: $V = -E(x - x_0)$
Con la scelta dello zero del potenziale imponiamo che tale retta, di coefficiente angolare $-E$, passi per un punto stabilito. La scelta effettuata porta a:



$$V = -E(x - d) \qquad 0 \le x \le d$$

8) Campo elettrico costante verticale



$\vec{F}_P + \vec{F}_E = m\vec{a}$

$\vec{F}_P$ e $\vec{F}_E$ conservative (costanti)

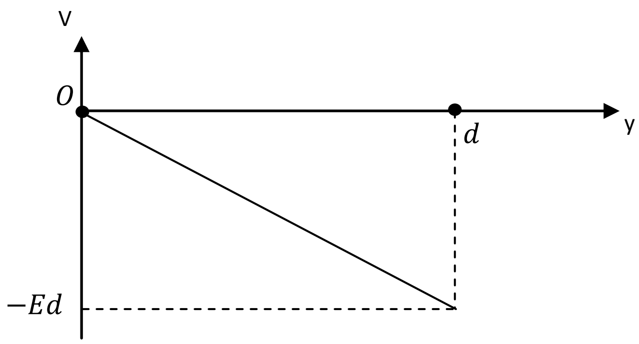
$$\Downarrow$$

$$E_M = K + U_P + U_E =$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + mg(y - y_0) - q_0E(y - y_0) = \text{cost.}$$

Nota: anche qui bisogna innanzitutto fissare a 0 l'energia potenziale in un punto di coordinate (x_0, y_0) scelto arbitrariamente. Ad esempio, fissato il SR come in figura, si può scegliere $x_0 = 0\,, y_0 = 0$ $(Z \equiv O)$. In tal modo:

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgy - q_0Ey = \frac{1}{2}mv^2 + (mg - q_0E)y = \text{cost.}$$

Il potenziale elettrico tra le armature piane decresce linearmente con y: $V = -E(y - y_0)$
Con questa scelta dello zero del potenziale imponiamo che tale retta, di coefficiente angolare $-E$, passi per un punto stabilito. La scelta effettuata porta a



$$V = -Ey \qquad 0 \le y \le d$$

Si osservi che prima 0 era il potenziale più basso (armatura negativa), ora è il potenziale più alto (armatura positiva).

Nota pratica generale: se ciò che serve è solo applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica, discutere del punto in cui fissare $U = 0$ è superfluo...