Disequazioni binomie

Sono disequazioni del tipo: $\boldsymbol{x^n - a \gtrless 0}$ dove $x, a \in R,\ \ n \in N \wedge n \neq 0$

<u>Attenzione!</u> Non si può fare sempre, semplicemente:

$x^n - a \gtrless 0 \quad \Rightarrow \quad x^n \gtrless a \quad \Rightarrow \quad x \gtrless \sqrt[n]{a}$ (sbagliato!)

Basta, infatti, pensare al caso noto $n = 2$. Occorre distinguere diversi casi, a seconda dei valori di n e a.

Dimostriamo, infatti, che:

1) se n pari, $a < 0$ $\quad x^n - a > 0$ ha soluzioni $\forall\, x \in R$, $\quad x^n - a < 0$ non ha soluzioni
2) se n pari, $a \geq 0$ $\quad$ la disequazione equivale a $x^2 - \left(\sqrt[n]{a}\right)^2 \gtrless 0$
3) se n dispari $\quad$ la disequazione equivale a $x - \sqrt[n]{a} \gtrless 0$

(Nota: per n pari si arriva ad una disequazione di 2° grado, per n dispari ad una di 1°.)

Dimostrazione:

1) se n pari e $a < 0$, *(esempi:* $x^2 + 3 > 0$; $x^4 + \frac{11}{4} \leq 0$; $x^{10} + \sqrt{2} < 0$ *; ecc.)*
allora $x^n - a$ è sempre positivo, in quanto somma di x^n (≥ 0) e $-a(> 0)$. Quindi:

$$x^n - a > 0 \quad \forall\, x \in R \qquad ; \qquad x^n - a < 0 \quad \nexists\, x \in R$$

2) se n pari e $a \geq 0$, *(esempi:* $x^2 - 3 > 0$; $x^4 - \frac{11}{4} \leq 0$; $x^{10} - \sqrt{2} < 0$ *; ecc.)*
allora, a differenza del caso precedente, esiste $\sqrt[n]{a}$. Per la definizione stessa di radicale $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, per cui in questo caso la disequazione iniziale si può riscrivere come $x^n - \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \gtrless 0$. Detto $y = \sqrt[n]{a}$, essa diventa $x^n - y^n \gtrless 0$, cioè $x^n \gtrless y^n$. Siccome n è pari, possiamo porre $n = 2k$, con k numero naturale. Ciò porta a scrivere la disequazione come $(x^2)^k \gtrless (y^2)^k$. In questo modo le basi sono entrambe non negative. Ciò consente di usare il seguente risultato generale, valido per qualsiasi coppia di numeri reali $X, Y \geq 0$ e qualsiasi k naturale: $X^k \gtrless Y^k \iff X \gtrless Y$. Nel nostro caso $X = x^2$, $Y = y^2$, per cui la disuguaglianza iniziale equivale quindi a $x^2 \gtrless y^2 = \left(\sqrt[n]{a}\right)^2$.

3) se n dispari, *(esempi:* $x^3 + 3 > 0$; $x^5 - \frac{11}{4} \leq 0$; $x^{11} + \sqrt{2} < 0$ *; ecc.)*
allora, qualsiasi sia a, esiste $\sqrt[n]{a}$. Come prima, la disequazione iniziale si può riscrivere come $x^n - \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \gtrless 0$. Detto $y = \sqrt[n]{a}$, essa diventa $x^n - y^n \gtrless 0$, cioè $x^n \gtrless y^n$. Ciò consente di usare il seguente risultato generale, valido per qualsiasi coppia di numeri reali x, y e qualsiasi n dispari: $x^n \gtrless y^n \iff x \gtrless y$. La disuguaglianza iniziale equivale quindi a $x \gtrless y = \sqrt[n]{a}$.