Calcolo del campo elettrico in un punto dato,
fissata la distribuzione delle cariche sorgenti q_i

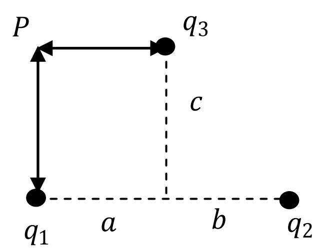
Si utilizza la legge di sovrapposizione per il campo elettrico (dedotta dal principio di sovrapposizione delle forze):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots$$

dove $\vec{E}_i$ sono i campi elettrici generati dalle singole cariche sorgenti q_i (o da sottodistribuzioni di cariche). Si svolgono poi i calcoli per componenti, dopo aver fissato, *se necessario*, un sistema di riferimento (SR).

Esempio:

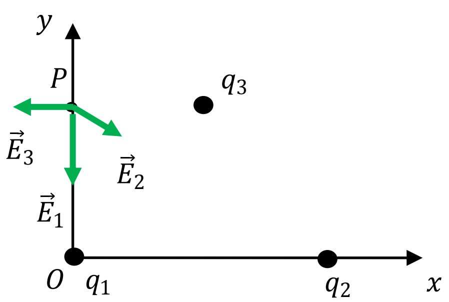
Data la distribuzione di carica in figura, calcolare il valore del campo elettrico nel punto P indicato. Siano: $q_1 = -2q,\ q_2 = -q,\ \ q_3 = q$, *con* $q = 2\ \mu C$ *e* $a = 10\ m,\ \ b = 12\ m,\ \ c = 15\ m$.



In questo caso, quindi: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

Fissiamo poi un SR. Infinite scelte sono possibili, alcune rendono le cose più facili. Una di esse è quella nella seconda figura, in cui l'origine è in corrispondenza di una delle cariche sorgenti; un'altra può essere quella in cui O coincide col punto in cui calcolare il campo (cioè in cui posizionare la carica di prova). Con la scelta in figura, $P(0; c)$ e le 3 cariche si trovano nei punti

$$P_1 \equiv O(0;0) \qquad P_2(a+b;0) \qquad P_3(a;c)$$



È bene, inoltre, visualizzare subito direzione e verso del campo generato da ciascuna delle cariche sorgenti nel punto P (nella figura le intensità non sono quindi in scala).
Andiamo dunque a calcolare:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} = \\ = E_1 \cos\vartheta_1 + E_2 \cos\vartheta_2 + E_3 \cos\vartheta_3$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} = \\ = E_1 \sin\vartheta_1 + E_2 \sin\vartheta_2 + E_3 \sin\vartheta_3$$

dove E_i sono i moduli dei campi elettrici generati dalle singole cariche puntiformi e ϑ_i gli angoli compresi, in senso antiorario, tra il semiasse x positivo e i corrispondenti vettori $\vec{E}_i$. In questo caso:

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{{r_{1P}}^2} = k\frac{2q}{c^2} \cong 159{,}82\ \mathrm{N/C} \qquad \vartheta_1 = 270°$$

$$E_2 = k\frac{|q_2|}{{r_{2P}}^2} = k\frac{q}{(a+b)^2 + c^2} \cong 25{,}36\ \mathrm{N/C} \qquad \vartheta_2 = \tan^{-1}\frac{y_2 - y_P}{x_2 - x_P} = \tan^{-1}\left(\frac{-c}{a+b}\right) \cong -34{,}28°$$

$$E_3 = k\frac{|q_3|}{{r_{3P}}^2} = k\frac{q}{a^2} = 179{,}8\ \mathrm{N/C} \qquad \vartheta_3 = \tan^{-1}\frac{y_3 - y_P}{x_3 - x_P} + 180° = \tan^{-1}\left(\frac{0}{a+b}\right) = 0 + 180° = 180°$$

Attenzione! L'arcotangente[1] restituisce valori compresi nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right)$, dunque occorre controllare se il secondo lato dell'angolo in questione è effettivamente appartenente al 1° o al 4° quadrante, oppure se appartiene invece al 2° o 3° quadrante; in quest'ultimo caso, occorre aggiungere un periodo della tangente (π) per ottenere l'angolo corretto. Nel caso trattato, ciò avviene per ϑ_3 e non per ϑ_2. Quanto a ϑ_1, si osservi che -90° e +90° non sono inclusi nel codominio dell'arcotangente: in tali casi si scrive direttamente il valore dell'angolo guardando la figura.

Eseguendo i calcoli si ottiene infine:

$$\begin{aligned} E_x &= E_1\cos\vartheta_1 + E_2\cos\vartheta_2 + E_3\cos\vartheta_3 \\ &\cong 159{,}82\ \mathrm{N/C}\ \cos 270° + 25{,}36\ \mathrm{N/C}\cos(-34{,}28°) + 179{,}8\ \mathrm{N/C}\ \cos 180° \\ &\cong 0 + 20{,}95 - 179{,}8\ \mathrm{N/C} = -158{,}85\ \mathrm{N/C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y &= E_1\sin\vartheta_1 + E_2\sin\vartheta_2 + E_3\sin\vartheta_3 \\ &\cong 159{,}82\ \mathrm{N/C}\ \sin 270° + 25{,}36\ \mathrm{N/C}\sin(-34{,}28°) + 179{,}8\ \mathrm{N/C}\ \sin 180° \\ &\cong -159{,}82 - 14{,}28 + 0\ \mathrm{N/C} = -145{,}54\ \mathrm{N/C} \end{aligned}$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{{E_x}^2 + {E_y}^2} \cong 215{,}44\ \mathrm{N/C} \qquad \vartheta_2 = \tan^{-1}\frac{E_y}{E_x} + 180° \cong 222{,}5° \text{ (3° quadrante)}$$

Domande:	*1) Ripeti lo stesso calcolo invertendo il segno di q_1 e q_3.*
	2) Ripeti lo stesso calcolo per il punto P' simmetrico di P rispetto all'origine
	3) Se $q_3 = 0$, e $q_1 = -q_2 = q$, quanto vale il campo elettrico nel punto medio tra le due cariche?

[1] Per motivi legati al programma di scrittura, qui l'arcotangente è indicata con tan^{-1}.

Individuare i punti in cui il campo elettrico è nullo,

fissata la distribuzione delle cariche sorgenti q_i

- Caso unidimensionale -

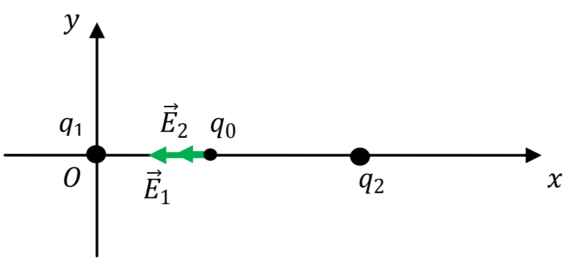
Ancora una volta, fondamentale è l'applicazione della legge di sovrapposizione per il campo elettrico:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots$$

Ricercare la posizione in cui il campo è nullo significa imporre $\vec{E} = 0$ in tale relazione, che diviene così un'equazione le cui incognite sono i vettori posizione del/i punto/i in cui si verifica ciò. Tale equazione vettoriale corrisponde a 3 equazioni scalari (non lineari) nelle 3 incognite x, y, z.
Si può restringere il problema ricercando tali eventuali punti su un determinato piano o su una data retta. Noi ci limitiamo qui a trattare il caso più semplice: quello in cui le cariche sorgenti, puntiformi, sono allineate e ricerchiamo su tale retta gli eventuali punti in cui si annulla il campo elettrico.
Ovviamente è opportuno far coincidere la retta in questione con un asse del sistema di riferimento cartesiano. Questo fa sì che il problema si riduca ad un'equazione e un'incognita.

Esempio:

Data la distribuzione di carica in figura, determinare, se esistono, i punti appartenenti alla retta su cui si trovano le cariche in cui il campo elettrico si annulla. Siano: $q_1 = -2q$, $q_2 = q$, con $q = 2\ \mu C$; le cariche distano tra loro $3{,}50\ cm$.



Fissato il SR nel modo indicato in figura abbiamo:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 3{,}5\ cm$$

Le cariche suddividono l'asse x in vari intervalli (qui 3); verifichiamo innanzitutto se tra essi ve ne sono alcuni in cui il campo elettrico non può annullarsi: facciamo perciò <u>innanzitutto un'analisi qualitativa</u>. Immaginiamo quindi di prendere una piccola carica di prova q_0 (si ricordi: positiva) e di posizionarla di volta in volta in un intervallo diverso, in un punto qualsiasi di esso. In quel punto, disegniamo il vettore campo elettrico generato da ognuna delle cariche sorgenti, utilizzando solo le informazioni di direzione e verso, controllando se le forze sulla carica di prova sono attrattive o repulsive. Se i vettori disegnati non possono dare somma zero, perché hanno tutti lo stesso verso, allora nessun punto dell'intervallo fa al caso nostro; in caso contrario, allora occorre ricercare se esistono punti in cui le intensità dei singoli contributi sono tali da fare annullare la somma vettoriale.

Nell'esempio considerato, gli $\vec{E}_i$ hanno lo stesso verso per $x_1 < x < x_2$: il campo elettrico non potrà annullarsi in nessuno dei punti compresi tra le due cariche (si può generalizzare: tra cariche di segno opposto il campo elettrico non si annulla mai). Negli altri due intervalli, invece, gli $\vec{E}_i$ potrebbero dare somma zero; se ciò avvenga effettivamente o meno dobbiamo verificarlo in modo esplicito.

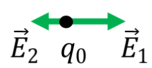
Il punto di partenza è sempre

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_1 \cos\vartheta_1 + E_2 \cos\vartheta_2 = 0$$

Nei casi di questo tipo, gli angoli in gioco sono sempre 0° o 180° (la direzione del campo è sempre l'asse x) e i coseni corrispondenti sono +1 e -1 rispettivamente: si possono quindi evitare un po' di formalità e assegnare immediatamente il segno corretto alla componente in questione, guardando in figura se il campo è orientato concordemente all'asse o meno.

Detta x_0 la coordinata incognita[2], in corrispondenza della quale q_0 non sente alcuna forza elettrica, consideriamo gli eventuali casi possibili:

$x_0 < x_1$ $\qquad E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_1 - E_2 = 0$

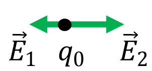


$$k\frac{|q_1|}{(x_0-x_1)^2} - k\frac{|q_2|}{(x_0-x_2)^2} = 0 \implies k\frac{2q}{{x_0}^2} - k\frac{q}{(x_0-x_2)^2} = 0 \qquad \text{C.E. } x \neq x_1, x_2$$

$$\implies {x_0}^2 - 4x_2x_0 + 2x_2 = 0 \implies x_{0\,1,2} = \left(2 \pm \sqrt{2}\right)x_2 > x_1$$

Questi due valori <u>non</u> sono accettabili perché corrispondono a posizioni a destra di q_1, non alla sua sinistra, come richiesto in ipotesi $(x_0 < x_1)$. Si noti che: 1) l'equazione non dipende né da k, né da q, ma dipende dal rapporto tra le cariche; 2) le condizioni di esistenza dell'equazione richiedono che la carica di prova non si trovi in coincidenza delle cariche sorgenti puntiformi.

$x_0 > x_2$ $\qquad E_x = E_{1x} + E_{2x} = -E_1 + E_2 = 0$



$$-k\frac{|q_1|}{(x-x_1)^2} + k\frac{|q_2|}{(x-x_2)^2} = 0 \implies -k\frac{2q}{x^2} + k\frac{q}{(x-x_2)^2} = 0 \qquad \text{C.E. } x \neq x_1, x_2$$

Siamo giunti alla stessa equazione di prima: essa avrà le stesse soluzioni. Solo una di esse è accettabile: quella che soddisfa l'ipotesi $x_0 > x_2$. Essa è $x_{02} = \left(2 + \sqrt{2}\right)x_2 \cong 11{,}9\ cm$

Domande:	*1) Ripeti lo stesso calcolo con* $q_1 = -2q,\ q_2 = 3q$
	2) Se le cariche sorgenti fossero $n > 2$, *di quale grado risulterebbe l'equazione da risolvere?*

[2] È forse più comodo chiamare x tale coordinata incognita. Ne risulterebbe però una notevole confusione tra le posizioni delle due cariche sorgenti x_1, x_2 e le due soluzioni dell'equazione di secondo grado per l'incognita.